Adjustment Procedure

اسلوب التصحيح

نظريا فأن حل أي مسألة يتم بقياس كميات معلومة في المعادلات وهذه الكميات المقيسة يجب أن تكون كافية لتسمح لنا بالحل للمجاهل المتبقية في المعادلة **unknown or parameter**

هناك مسألتين الأولى: أن المعادلات غير خطية **non linear** والثانية انه في الحالات الاعتيادية هناك قياسات أو أر صادات اكثر مما يتطلبه الحل **redundant** (فائض) وللحصول على حلول مقبولة عمليا وإحصائيا يجب أن نقوم بتحويل هذه المعادلات من صيغتها اللاخطية إلى خطية أيضا وطريقة اقـل المربعـات **least square method** ستطبق للتعامل مع الفائض في القياس و عموما فأن المعادلات تحول إلى خطية باستخدام متسلسلات تايلر **Taylor expansion** وسنأخذ بالحسبان الحد الصفري **zero order** والحد الأول **First order** و همـل الحـدود العليا.

المعادلة الشرطية يمكن أن تكتب كدالة الارصادات وا اهيل وتساوي صفر وكالآتي

$$F\,(O.\,X) = 0$$

observations ← O   X → parameters

إذا ما عوضنا بقيمة الارصادات ثم عوضنا عن قـيم ا اهـل بقـيم تقريبـة **approximate value of parameter** عندئذ المعادلة لن تتحقق تماما إلا إذا تم إضافة الأخطاء المتبقية **residual errors** للارصادات ثم إذا أضفنا تصحيحا **Δ=Corrections** إلى قيم ا اهيل التقريبية عند ذلك ستحقق المعادلة :-

$$F\,(O^{o}+V, X+\Delta) = zero$$

إذا طبقنا متسلسلات تايلر وأهملنا الحدود العليا فان

$$A = \left.\frac{\partial f}{\partial o}\right|_{o^{o},\,x^{o}}$$

$$B = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{o^{o},\,x^{o}}$$

الصيغة الخطية الناتجة هي الصيغة العامة للمعالادت الأرصادية

$$F(O^{o}, X^{o}) + AV + B\Delta = 0$$

حيث

F°: هي الدالة التي قيمتها مستحصلة من تعويض قيم الارصادات والقيم التقريبية للمجاهيل في النموذج الرياضي

V: وهي عبارة مصفوفة عمودية تتألف من بواقي الارصادات

Δ:مصفوفة عمودية من قيم التصحيحات المضافة جبريا إلى القيم التقريبية للمجاهيل

A: هي مصفوفة تتكون من المشتقة الجزئية للدالة نسبة إلى الارصادات

B : هي مصفوفة تتكون من المشتقة الجزئية للدالة نسبة إلى ا اهيل

اما حجوم المصفوفات

A= c x n
V= n x l
B= c x u
Δ= u x l
f= c x l

حيث

c= عدد المعادلات

n= عدد الارصادات

u= عدد ا اهيل

<u>اشتقـ ـاق التصحيح باقل المربعات باسلوب المصفوفات</u>

$\phi = v^t\ w\ v$ » minimum

$f_o + Av + B\Delta = 0$

يتم حل المعادلة باستخدام مضروب لاكرانج **LaGrange multiplier k**

$\phi' = v^t\ w\ v - 2k^t\ (Av + B\Delta - f)$

وللحصول على اصغر قيمة ل ϕ' فان المشتقة الجزئية لها نسبة الى v و Δ ويساوا ا للصفر هي

$$\frac{\partial \phi'}{\partial v} = 2v'w - 2k'A = 0'$$

$$\frac{\partial \phi'}{\partial \Delta} = -2k'B = 0'$$

وبنقل الحدود وترتيبها فان

$-wv + A^t k = 0$

$B^t\ K = 0$

Then $V = w^{-1}\ A^t\ K = QA^t\ K$

وبتعويض قيمة V بالمعادلة العامة

$AQ\ A^t k + B\Delta = F$ let $Q_e = AQA'$

$Q_e k + B\Delta = F$

$K = Q_e^{-1}(-B\Delta + f) = w_e\ (-B\Delta - F)$

وبتعويض K في المعادلة $B^t\ k = 0$ فان المعادلات الناتجة تسمى المعادلات الطبيعية

$$\boxed{(B^t\ w_e B)\ \Delta = (B^t\ w_e f) \qquad \textbf{normal equation}}$$

or

$N\Delta = t$

$\Delta = N^{-1} t$

الخلاصة في معادلات التصحيح

$Q_e = AQA^t$, $w_e = Q^{-1}_e$
$N = B^t w_e B$
$\Delta = N^{-1} t \; (x = x_o + \Delta)$
$K = w_e(-B\Delta + f)$
$V = QA^t W_e(-B\Delta + f) = QA^t K$
$L^{\wedge} = L + v$
$\sigma^{\wedge}_o = v^t wv/r$
$r = n - u$ الفائض في القياس

ان ما تقدم من المعادلات يندرج ضمن الاسلوب العام للتصحيح والذي يمكن ان يتم تبسـيطه الى نـوعين حسـب المخطط التالي

Adjustment By least square
(General)
$Av. + B\Delta + f = 0$

تصحيح بالاشتراطات

ADJ. BY CONDITION
DIRECT METHOD
عندما يكون الموديل الرياضي لمسالة ما يتألف من أر صادات فقط يجمعهما شرط هندسي فمثلا :-
مجموع زوايا المثلث 180
$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = 180$

المعادلـة الرصـدية للتصـحيح بالاشتراطات $AV. = F$

تصحيح بالارصادات

ADJ. BY OBSERVATION
INDIRECT METHOD
عندما يكون النموذج الرياضـي لمسالة ما يتـألف مـن عـدة مجاهيل + رصدة واحدة فإنـنا نستخدم التصحيح بالارصـادات فمثلا :-

$XP = X_1 + S_1 \, SIN\alpha_1$
$YP = Y_1 + S_1 \, COS\alpha_1$
$V + B\Delta = F$ المعادلة الرصدية

Adj By Condition Method التصحيح بالاشتراطات

$Av = f$
$K = w_e f = Q_e^{-1} f$
$V = QA^t k = QA^t w_e f$
$L^{\wedge} = L + v$
$\sigma^{\wedge 2}_o = v^t wv/r$
$w = Q^{-1}$

Adj. By observations method التصحيح بالمعادلات الرصدية

$v + B\Delta = f$
$N = B^t w B$
$t = B^t w f$

$\Delta = N^{-1} t$
$v = f - B\Delta$
$L^{\wedge} = L + v$
$\sigma^{\wedge 2}_o = v^t wv/r$
$Q_{\Delta\Delta} = N^{-1}$

مثال :

تم قياس الكميات x,y,z بعدة تشكيلات كالاتي

$$x = 3.0 \qquad (w = 1)$$
$$x + y = 6.1 \qquad (w = 2)$$
$$x + y + z = 11.2 \qquad (w = 3)$$
$$y + z = 8.1 \qquad (w = 2)$$

احسب القيمة الاكثر احتمالية لكل من x,y,z باقل المربعات باستخدام المعادلات الرصدية؟

الحل:

$$n = 4$$
$$n_0 = 3 \qquad r = n - n_0 = 1$$

حيث n_0 هو اقل عدد من الارصادات يلزم لحل السألة

بطريقة الاشتراطات عدد المعادلات=1

بطريقة الارصادات عدد المعادلات=4

وباستخدام العلاقة التالية للمعادلات الرصدية الخطية

M.P.V- observed value = residual error

وحيث ان القيمة الاكثر احتمالا تتالف من (القيمة التقريبية+التصحيحات) فان إيجاد القيمة التقريبية لـ (x,y,z)

هي

$$x_0 = 3.0$$
$$y_0 = 6.1 - 3.0 = 3.1$$
$$z_0 = 11.2 - 6.1 = 5.1$$
$$\text{M.P.V of } x = x^\circ + \Delta x$$
$$\text{M.P.V of } y = y^\circ + \Delta y$$
$$\text{M.P.V.of } z = z^\circ + \Delta z$$

اذن المعادلات الرصدية اللازمة للحل

$$V_1 = 3.0 + \Delta x - 3.0$$
$$V_2 = 3.0 + \Delta x + 3.1 + \Delta y - 6.1$$
$$V_3 = 3.0 + \Delta x + 3.1 + \Delta y + 5.1 + \Delta z - 11.2$$
$$V_4 = \qquad 3.1 + \Delta y + 5.1 + \Delta z - 8.1$$

$$V_1 = \Delta x \quad + 0$$
$$V_2 = \Delta x + \Delta y + 0$$
$$V_3 = \Delta x + \Delta y + \Delta z + 0$$
$$V_4 = \Delta y + \Delta z + 0.1$$

او بالمصفوفات

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad , \Delta = \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{bmatrix} \quad , V = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix}$$

$$f = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

وبصيغة المصفوفات:

$$B\Delta + V = f$$

$$N = B^t w B$$
$$t = B^t w f$$
$$\Delta = N^{-1} t$$
$$V = f - B\Delta$$
$$L^{\wedge} = L + v$$

$$\therefore \Delta = \begin{bmatrix} +0.055 \\ -0.055 \\ -0.016 \end{bmatrix}$$

نضيف قيم **Δ** الى ا اهيل **X_0, Y_0, Z_0** فتصبح القيمة الاكثر احتمالا للمجاهيل

$Y=3.1-0.055=3.045$ و $Z= 5.1-0.016=5.084$, و $X=3.0+0.055=3.055$

<u>مثال :</u>

المطلوب اجراء التصحيح للمعادلتين الشرطيتين التاليتين

$$x_1+x_2+x_3+x_4 = 17.66$$
$$x_3+x_4+x_5 = 12.96$$

$$X_1 = 3.00$$
$$X_2 = 5.00$$
$$X_3 = 7.00$$
$$X_4 = 2.63$$
$$X_5 = 3.27$$

الحل:

لتكن كل قيمة مقيسة **x** لها مقدار تصحيح**v** لذا فان العادلات الشرطية ستكون

(3.0+v1)+(5.0+v2)+(7.0+v3)+(2.63+v4)=17.66
(7.0+v3)+(2.23+v4)+(3.27+v5) =12.96

v1+v2+v3+v4= 0.03
v3+v4+v5=0.06

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{bmatrix} = f = \begin{bmatrix} 0.03 \\ 0.06 \end{bmatrix}$$

$if \ .the \ .weights \ .were$

$$w = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/1 \end{bmatrix}$$

$$k = (Aw^{-1}A')^{-1} f$$

$$\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.03 \\ 0.06 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.03 \\ 0.26 \end{bmatrix}$$

$$v = w^{-1} A' k$$

$$v = \begin{bmatrix} -0.0015 \\ -0.003 \\ +0.023 \\ 0.0115 \\ 0.026 \end{bmatrix}$$

وباضافة قيم الاخطاء المتبقية **V** الى قيم الرصدات نحصل على القيم الاكثر احتمالا

سيزات التصحيح باقل المربعات

- ان القياسات المصححة ذا الاسلوب تتوافق مع قوانين الاحتمالية.
- يزود اسلوب قل المربعات بافضل الحلول المحتملة موعة من الارصادات
- يسمح هذا الاسلوب بوضع اوزان للارصادات
- يجبر القياسات على اقفال الاشكال هندسية
- يوفر تقدير لقيم الاخطاء في البيانات المصححة
- يمكن تصحيح كل القياسات في ان واحد
- طريقة قديمة طورت في العام **1790** أي ا ا اقدم من الموازنة بالقمباص المطورة عام **1809**
- يمكن ان تبرمج بالحاسوب وبالتالي تتوافق مع تقنيات المساحة الحديثة